Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbure constante.

PAR R. LIOUVILLE.

L'objet de ce mémoire est d'indiquer la signification géométrique des équations différentielles du second ordre ayant leur intégrale générale linéaire par rapport aux constantes arbitraires et de former leurs invariants pour toutes les substitutions qui ne changent point, soit l'inconnue, soit la variable indépendante.

I. Les lignes géodésiques d'une surface à courbure constante peuvent être transformées toutes ensemble en un système plan de lignes droites, car, après application sur une sphère, les plans qui passent par le centre de cette dernière tracent sur celui qu'on a choisi toutes les lignes droites qui y sont contenues.

J'ajoute que chaque équation différentielle du second ordre, capable de représenter les droites d'un plan, c'est à dire ayant son intégrale générale linéaire par rapport aux constantes arbitraires, peut être regardée comme définissant les lignes géodésiques d'une surface à courbure constante. Soit en effet donnée ainsi

$$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 = 0, \tag{1}$$

l'intégrale dont il s'agit ; α_1, α_2, α_3 désignent des constantes arbitraires, z_1, z_2, z_3, des fonctions connues des variables x et y, entre lesquelles a lieu l'équation différentielle : le premier membre de (1) est la solution générale d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} + Tz = 0, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + P'\frac{\partial z}{\partial x} + Q'\frac{\partial z}{\partial y} + T'z = 0, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P''\frac{\partial z}{\partial x} + Q''\frac{\partial z}{\partial y} + T''z = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

et l'on peut, dans celui-ci, multiplier l'inconnue z, par un facteur μ, sans que la relation (1) soit essentiellement modifiée. Si donc on fait en sorte que le produit

$$\mu^2 (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2), \tag{3}$$

soit une constante c^2, les expressions $z_1\mu$, $z_2\mu$, ... , étant celles qui déterminent les points d'une sphère en coordonnées cartésiennes, et l'équation établie entre x et y n'ayant pas changé, il est mis en évidence qu'elle appartient aux lignes géodésiques d'une surface à courbure constante.

Ainsi la recherche de ces lignes équivaut précisément à l'étude d'une équation différentielle, dont l'intégrale ne contient qu'au premier degré les constantes arbitraires; comme on le montrerait sans peine, tout revient en ce cas à l'intégration d'une équation différentielle linéaire, du troisième ordre.

Lorsqu'on donne l'élément linéaire,

$$ds = \sqrt{edy^2 + 2fdxdy + gdx^2},$$

d'une surface, l'équation des lignes géodésiques s'en déduit par des formules déterminées et connues, mais la question inverse, notamment pour les surfaces à courbure constante, mérite quelques explications. Soit donc

$$y'' + a_1 y'^3 + 3a_2 y'^2 + 3a_3 y' + a_4 = 0, \tag{4}$$

l'équation des lignes géodésiques pour une surface de cette espèce; $a_1, a_2, \ldots, a_4$ sont fonctions d'x et d'y et vérifient des relations faciles à former. Pour trouver les expressions correspondantes de e, f, g, il convient d'obtenir d'abord le système, analogue à (2), corrélatif de l'équation (4) et dont trois intégrales satisfont à la condition

$$\Sigma z^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1. \tag{5}$$

Je supposerai que ce soit le système (2) lui-même et il en résultera évidemment

$$\Sigma\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = T'', \ \Sigma\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = T', \ \Sigma\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = T,$$

c'est à dire

$$ds^2 = T''dx^2 + 2T'dxdy + Tdy^2; \tag{6}$$

comme on connait l'un des systèmes qui peuvent être pris pour corrélatifs de l'équation (4), par exemple le suivant

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a_1\frac{\partial z}{\partial x} - a_2\frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial y} - \frac{\partial a_1}{\partial x} + 2a_1a_3 - 2a_2^2\right)z = 0 = A(z),\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + a_2\frac{\partial z}{\partial x} - a_3\frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1a_4 - a_2a_3\right)z = 0 = A'(z),\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a_3\frac{\partial z}{\partial x} - a_4\frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial a_4}{\partial y} - \frac{\partial a_3}{\partial x} + 2a_2a_4 - 2a_3^2\right)z = 0 = A''(z),
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

le point est de trouver le facteur μ, par lequel il faut multiplier ses intégrales pour justifier l'équation (5), ou, ce qui est la même chose, de déterminer, pour le système entièrement donné (7), l'expression de la somme

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0;$$

or un calcul très simple fournit les quatre équations, aux dérivées partielles du troisième ordre satisfaites par la fonction θ:

$$\frac{\partial A''(\theta)}{\partial x} + 2a_3 . A''(\theta) - 2a_4 A'(\theta) + 3\left(\frac{\partial a_4}{\partial y} - \frac{\partial a_3}{\partial x} + 2a_2 a_4 - 2a_3^2\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$
$$+ \theta\Big[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_4}{\partial y} - \frac{\partial a_3}{\partial x} + 2a_2a_4 - 2a_3^2\right) + 2a_3\left(\frac{\partial a_4}{\partial y} - \frac{\partial a_3}{\partial x} + 2a_2a_4 - 2a_3^2\right)$$
$$- 2a_4\left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1a_4 - a_2a_3\right)\Big] = 0,$$

$$\frac{\partial A'(\theta)}{\partial x} + a_2 . A''(\theta) - a_4 . A(\theta) + 2\left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1a_4 - a_2a_3\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$
$$+ \left(\frac{\partial a_4}{\partial y} - \frac{\partial a_3}{\partial x} + 2a_2a_4 - 2a_3^2\right)\frac{\partial \theta}{\partial y} + \theta\Big[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1a_4 - a_2a_3\right)$$
$$+ a_2\left(\frac{\partial a_4}{\partial y} - \frac{\partial a_3}{\partial x} + 2a_2a_4 - 2a_3^2\right) - a_4\left(\frac{\partial a_2}{\partial y} - \frac{\partial a_1}{\partial x} + 2a_1a_3 - 2a_2^2\right)\Big] = 0,$$

etc.,

elles sont linéaires et admettent six intégrales communes; de l'une d'elles, on conclut un système d'expressions pour T, T', T'' ou e, f, g.

Ainsi, quand l'équation (4) est donnée, les coefficients e, f, g du carré de l'élément linéaire ne sont pas complètement déterminés; leurs expressions renferment six constantes arbitraires, qui y entrent d'une manière homogène. Soient (e_1, f_1, g_1), (e_2, f_2, g_2), deux systèmes distincts d'expressions pour les coefficients e, f, g et soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), respectivement, les variables correspondantes: la substitution $(x_1, y_1; x_2, y_2)$ est visiblement l'une de celles, en nombre infini, qui transforment l'équation (4) en elle-même.

II. D'après ce qui précède, il est clair que les équations semblables à (4) sont toutes réductibles à celle-ci

$$y'' = 0$$

et par conséquent les unes aux autres; elles ne peuvent donc avoir d'invariants pour l'ensemble des transformations générales

$$x_1 = \phi(x, y), \quad y_1 = \psi(x, y);$$

mais il n'en est pas de même si l'on se borne à changer, soit la variable, soit l'inconnue et, pour fixer les idées, c'est de ce dernier changement qu'il sera question, l'autre étant d'ailleurs exactement pareil.

Il convient d'appeler *invariants relatifs*, à l'égard des transformations

$$x_1 = x, \quad y_1 = \psi(x, y), \tag{8}$$

dont il s'agit, les fonctions des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_4$ et de leurs dérivées, qui se divisent par une puissance de

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

après la substitution (8); l'exposant de cette puissance est le poids de l'invariant considéré; s'il est nul, l'invariant est dit *absolu*. D'après ces deux formules,

$$y_1' = y' \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x},$$
$$y_1'' = y'' \frac{\partial\psi}{\partial y} + y'^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + 2y' \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},$$

le coefficient de $y_1'^3$, dans l'équation transformée de (4), est

$$a_1 \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^{-2};$$

a_1 est donc un premier invariant relatif, de poids égal à 2.

Une forme invariante ou canonique de l'équation proposée en résulte sans difficulté, car la fonction ψ définie par cette relation

$$\frac{1}{a_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 = \text{constante},$$

ou, avec plus de généralité, par la suivante

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = a_1^{\frac{1}{2}} f(x),$$

est manifestement un invariant absolu; lorsqu'on la prend pour inconnue dans l'équation (4), la transformée est canonique; ses coefficients jouent le rôle d'invariants absolus, mais ils dépendent d'une quadrature et ne sont point en conséquence des invariants *proprement dits*. Or certaines questions exigent que l'on distingue les invariants de cette espèce; il convient donc de chercher un système de fonctions, formées uniquement par combinaisons algébriques des coefficients et de leurs dérivées, données en outre de la propriété d'invariance.

C'est à quoi l'on peut parvenir en général comme je devais expliquer. $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, sont des fonctions d'$x$ et d'y, déterminées par les relations (2); elles deviennent des fonctions d'une seule variable satisfaisant aux équations différentielles

$$\begin{gathered} dz - \left(\frac{\partial z}{\partial x} + y' \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx = 0, \\ d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left\{\left(P'' \frac{\partial z}{\partial x} + Q'' \frac{\partial z}{\partial y} + T''z\right) + y'\left(P' \frac{\partial z}{\partial x} + Q' \frac{\partial z}{\partial y} + T'z\right)\right\} dx = 0, \quad (9) \\ d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left\{\left(P' \frac{\partial z}{\partial x} + Q' \frac{\partial z}{\partial y} + T'z\right) + y'\left(P \frac{\partial z}{\partial x} + Q \frac{\partial z}{\partial y} + Tz\right)\right\} dx = 0, \end{gathered}$$

dès qu'on y remplace y par l'une des expressions qui vérifient l'équation (4). Je considère en particulier la combinaison

$$\frac{\partial z}{\partial y} + \lambda z = \zeta, \tag{10}$$

où j'ai désigné par λ une fonction arbitraire d'x et d'y. Aucune des transformations (8) ne peut introduire $\frac{\partial z}{\partial x}$ dans le premier membre de (10) et il résulte du système (9),

$$\begin{aligned} d\zeta = \frac{\partial z}{\partial x}[\lambda dx - (P'dx + Pdy)] &+ (\zeta - \lambda z)[\lambda dy - (Q'dx + Qdy)] \\ &+ z[d\lambda - (T'dx + Tdy)]. \end{aligned} \tag{11}$$

Par un choix convenable de λ, je puis rendre nul le coefficient de $\frac{\partial z}{\partial x}$, dans cette relation, ce qui exige

$$\lambda = P' + Py'; \tag{12}$$

cela fait, les transformations (8) laisseront toutes à l'équation (11) le caractère d'une relation entre z et ζ seulement; ζ est donc, en vertu de (12), l'expression d'un invariant; il est visible de plus que z est un invariant absolu, $\frac{\partial z}{\partial y}$ un invariant relatif, de poids 1; il en est donc de même de λ. Ainsi, le premier membre de l'équation (12) et par suite la combinaison

$$P' + Py'$$

jouent le rôle d'invariant relatif, de poids égal à 1. Une autre combinaison de même espèce est connue avant toute recherche, c'est le déterminant fonctionnel

$$\Delta = \sum \pm z_1 \frac{\partial z_2}{\partial x} \frac{\partial z_3}{\partial y}$$

des trois solutions du système (2) et l'on sait que d'ailleurs on a

$$d \log \Delta = -[(P' + Q)\,dy + (P'' + Q')\,dx],$$

outre les relations, déjà signalées dans un Mémoire antérieur (Journal de l'Ecole Polytechnique, LVII° Cahier),

$$P = a_1, \quad 2P' - Q = 3a_2, \quad P'' - 2Q' = 3a_3, \quad Q'' = -a_4.$$

On en déduit d'abord

$$P' = a_2 - \frac{1}{3}\frac{\partial \log \Delta}{\partial y};$$

mais Δ peut être pris à volonté parmi les invariants relatifs de poids 1, sans que la correspondance établie entre l'équation donnée (4) et le système (2) soit troublée.

J'en profite pour poser

$$\Delta^2 = a_1;$$

l'expression (12) se change alors en la suivante

$$a_2 - \frac{1}{6}\frac{\partial \log a_1}{\partial y} + a_1 y' \tag{13}$$

et, si l'on divise par $a_1^{\frac{1}{2}}$ ce covariant de l'équation (4), le quotient n'est modifié en aucune manière par les transformations indiquées; pour obtenir une condition invariante, il suffira d'exprimer que ce quotient, multiplié par dx,

$$a_1^{\frac{1}{2}} dy + \left(a_2 a_1^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{6} a_1^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \log a_1}{\partial y}\right) dx,$$

est une différentielle exacte. Je trouve ainsi la relation

$$6a_1^2 \frac{\partial a_1}{\partial x} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_1}{\partial y} - 6a_1 a_2\right) - 3\frac{\partial a_1}{\partial y}\left(\frac{\partial a_1}{\partial y} - 6a_1 a_2\right) = 0, \tag{14}$$

dont le premier membre ne peut être autre chose qu'un invariant relatif, et la substitution simple,

$$cy_1 = y$$

en montre immédiatement le poids, pourvu que c soit une constante. La conclusion est que cette combinaison

$$\nu_6 = 6a_1^2 \frac{\partial a_1}{\partial x} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_1}{\partial y} - 6a_1 a_2\right) - 3\frac{\partial a_1}{\partial y}\left(\frac{\partial a_1}{\partial y} - 6a_1 a_2\right), \tag{15}$$

des coefficients de l'équation (4) et de leurs dérivées, est un invariant de poids égal à 6.

J'ai remarqué, dans un autre travail, une équation du second ordre, covariante de (4), pour toutes les transformations qui n'en changent pas la variable; voici cette équation

$$y'' - a_1 y'^3 - 3\left(a_1 - \frac{1}{3}\frac{\partial \log a_1}{\partial y}\right) y'^2 - 3\left(a_3 - \frac{2}{3}\frac{\partial \log a_1}{\partial x}\right) y' - \frac{1}{a_1}\left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - 2\frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4\right) = 0, \qquad (16)$$

à laquelle on peut donner le nom d'*adjointe* de la proposée, car il y a entre elle et le système adjoint à (2) la même correspondance qu'entre l'équation et le système (2). Il est clair qu'un nouveau covariant des équations (4) et (16) est leur différence, qui se réduit au premier ordre; on aura donc une condition invariante à satisfaire, si la valeur d'y' qui fait évanouir l'expression (13) doit annuler aussi cette différence, ce qui implique

$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial y} - 6a_1 a_2\right)\left(\frac{\partial a_1}{\partial x} - 3a_1 a_3\right) - 6a_1^2\left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4\right) = 0. \qquad (17)$$

On en conclut que le premier membre ν_5 de la relation précédente est un invariant relatif, de poids 5.

Enfin, l'on en trouve un troisième, en cherchant sous quelle condition l'équation différentielle

$$a_1 y' + a_2 - \frac{1}{6}\frac{\partial \log a_1}{\partial y} = 0$$

et une intégrale première de la proposée. L'expression qui doit alors être nulle et qui se représente ainsi

$$\begin{aligned} \nu_9 = 36a_1^3 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_1}{\partial y} - 6a_1 a_2\right) + 6a_1\left(\frac{\partial a_1}{\partial y} - 6a_1 a_2\right).\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_1}{\partial y} - 6a_1 a_2\right) \\ + \left(\frac{\partial a_1}{\partial y} - 6a_1 a_2\right)^3 + 18a_1 a_2\left(\frac{\partial a_1}{\partial y} - 6a_1 a_2\right)^2 \\ - 12\left(\frac{\partial a_1}{\partial y} - 6a_1 a_2\right)\left(\frac{\partial a_1}{\partial y} + 6a_1^2\frac{\partial a_1}{\partial x} - 9a_3 a_1^3\right) + 6^3.a_1^5 a_4, \qquad (18) \end{aligned}$$

est un invariant, de poids 9.

Je suppose d'abord que l'un au moins des invariants absolus

$$\nu_6 a_1^{-3},\ \nu_5^2 a_1^{-5},\ \nu_9^2 a_1^{-9} \qquad (19)$$

contienne la variable y; en le prenant pour inconnue, on met l'équation (4) sous forme invariante, sans qu'aucune quadrature ait été nécessaire. Ses coefficients sont alors des invariants absolus proprement dits, entre lesquels l'élimination d'y établit trois relations caractérisques.

Je suppose au contraire les trois expressions (19) fonctions de x seulement; en ce cas, il faut recourir à la transformée canonique déjà signalée, dans laquelle le coefficient d'y'^3 ne dépend que de x; je l'écris de cette manière

$$y'' + \alpha_1 y'^3 + 3\alpha_2 y'^2 + 3\alpha_3 y' + \alpha_4 = 0 \tag{20}$$

et je remarque d'abord que la relation

$$\nu_6 \alpha_1^{-3} = \phi_1(x),$$

jointe à celles-ci

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = \alpha_1',$$

entraine

$$2\frac{\partial \alpha_2}{\partial y} = \alpha_1' - \frac{\alpha_1}{6}\phi_1(x).$$

Si donc on a déterminé α_1, comme cela est permis, par la formule

$$6\alpha_1' - \alpha_1\phi_1(x) = 0,$$

on voit que α_2 ne contient pas y.

Ayant de plus

$$\nu_9 \alpha_1^{-\frac{9}{2}} = \phi_2(x),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\alpha_1^{\frac{3}{2}}\phi_1(x) + 6^3.(\alpha_2\alpha_1' - \alpha_1\alpha_2' + 2\alpha_2^3 - 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1^2\alpha_4) = 0, \tag{21}$$

on connait, entre α_3 et α_4, une relation linéaire où n'entre que la variable x. Par suite, l'équation

$$\nu_5 \alpha_1^{-\frac{5}{2}} = \phi(x)$$

qui a lieu aussi suivant l'hypothèse et qui s'écrit encore de cette façon

$$6\alpha_1^2\left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial y} + \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2'\right) + 6\alpha_1\alpha_2(\alpha_1' - 3\alpha_1\alpha_3) + \alpha_1^{\frac{5}{2}}\phi(x) = 0, \tag{22}$$

définit pour α_3 une fonction linéaire de y.

Soient L_1, L_2 les expressions, signalées ailleurs (C. R. de l'Acad. des Sc. de Paris, 28 nov. 1887), qui s'évanouissent quand l'équation (20) a son intégrale générale linéaire par rapport aux constantes arbitraires; α_1, α_2 ne renfermant pas y, la combinaison

$$\alpha_1 L_1 - \alpha_2 L_2$$

peut être représentée sous la forme

$$\alpha_1 L_1 - \alpha_2 L_2 = \frac{\partial}{\partial y}\Big[\alpha_1 \frac{\partial \alpha_4}{\partial y} - \alpha_2 \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} - 2\alpha_1 \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 - 3\alpha_3(\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_3)\Big] - \frac{\partial}{\partial x}\Big[\alpha_2\alpha_1' - \alpha_1\alpha_2' + 2\alpha_2^3 - 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1^2\alpha_4\Big] \quad (23)$$

comme on le prouverait sans peine. Or l'ensemble des termes compris dans la dernière parenthèse est une fonction de x; d'après l'équation (21), le premier membre de l'équation (23) est nul; les termes qui y figurent dans la première parenthèse constituent donc une fonction linéaire de y et cela ne se peut évidemment, si l'on n'a pas $\frac{\partial \alpha_3}{\partial y} = 0$.

Cette équation ayant lieu, α_3 et par suite α_4, c'est à dire tous les coefficients de l'équation (20) sont fonctions de la seule variable x, ce qui donne un cas déjà étudié et ramené aux quadratures. C'est le seul dans lequel la méthode indiquée ne conduise point à une transformée canonique à l'aide des invariants proprement dits, quand a_1 n'est pas nul, et il est clair qu'il devait échapper en effet à toute considération fondée sur l'emploi unique de ces invariants.

Si a_1 est nul, l'intégration dépend d'une équation différentielle, linéaire et du troisième ordre, *ne contenant aucun paramètre:* la formation de cette dernière est le moyen le plus commode d'étudier l'équation proposée; mais, ayant déjà traîté ce sujet, je n'ai point à en parler ici.

Dans le cas général, j'ai montré comment l'intégration de l'équation (4) se ramène aux opérations suivantes:

1°. Chercher une solution du système linéaire

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial y} - P'V - PZ = 0, \\ &\frac{\partial Z}{\partial y} - Q'V - QZ + U = 0, \\ &\frac{\partial U}{\partial y} - T'V - TZ = 0, \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

dans lequel la variable x est regardée comme une constante;

2°. Intégrer une équation différentielle, linéaire et du 3° ordre, *où n'entre aucun paramètre.*

Or, on peut établir que la fonction Z joue le rôle d'un invariant relatif, de poids 1, pour toutes les transformations (8) et il en résulte que, si l'on consi-

dère l'équation déduite du système (24), à laquelle satisferait l'inconnue

$$Za_1^{-\frac{1}{2}},$$

isolée des deux autres, ses invariants absolus, sont, au sens même qui a été donné à ce mot par Mr. Halphen, des invariants de l'équation proposée (4), tels que nous les avons définis.

Deux cas surtout sont dignes de remarque.

Le premier se présente quand toutes les relations entre ces invariants demeurent indépendantes d'y; les solutions du système (24) s'obtiennent alors par des quadratures;

Le second a lieu, quand toutes ces relations sont au contraire indépendantes de x; le système (24), dont il faut avoir une intégrale, peut se réduire alors à une équation différentielle, du troisième ordre et linéaire, *ne renfermant aucun paramètre*, de sorte que tout le problème aboutit à des équations de cette nature.

PARIS, le 20 avril 1888.